ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ТРУДАХ Н. Н. ЛУЗИНА

А. П. ЮШКЕВИЧ

В конце 1983 г. исполнилось 100 лет со дня рождения Николая Николаевича Лузина (27.XI.1883—28.IV.1950), воспитанника и впоследствии профессора Московского университета, с 1927 г. члена-корреспондента и с 1929 г. действительного члена АН СССР, а также заведующего отделом теории функций Математического института им. В. А. Стеклова. В более широких кругах имя Лузина связано преимущественно с его первоклассными исследованиями по теории функций и с основанием, вместе с его учителем Д. Ф. Егоровым, Московской школы теории функций, не уступающей по общему значению Петербургской школе П. Л. Чебышева. Менее известно, что Лузин был математиком с широким диапазоном интересов и автором ценных статей по теории изгибания поверхностей на главном основании, служившей предметом занятий целой плеяды московских математиков, начиная с К. М. Петерсона; в области приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, где он успешно развил метод С. А. Чаплыгина; в качественной теории дифференциальных уравнений и т. д. Наряду с математикой Н. Н. Лузин живо интересовался философскими проблемами и, отчасти в этой связи, вопросами обоснования и истории математики. В краткой биографии Н. Н. Лузина его ученица Н. К. Бари и В. В. Голубев, его друг со студенческих лет, справедливо писали: «Н. Н. Лузин проявлял живой интерес к истории математики. Его перу принадлежат прекрасные статьи о Ньютоне, об Эйлере, очень интересная статья, касающаяся развития понятия функции, и статья о дифференциальном исчислении» [1, т. 3, с. 482].

Работы Н. Н. Лузина по истории математики мало известны даже специалистам—историкам науки, которые редко заглядывают в третий том его собрания сочинений, изданный четверть века назад, где они собраны почти полностью вместе. Первоначально эти статьи печатались в разных журналах, сборниках и в первом издании Большой Советской Энциклопедии, практически вышедшем из употребления, а одна рукопись была посмертно напечатана в XVI выпуске «Историко-математических исследований» за 1965 г. [2]. Всего таких статей, написанных за 1927—1945 гг., одиннадцать, и в них около 150 страниц печатного текста. Как правило, эти работы несут печать присущего Лузину подхода к вопросам истории науки — подхода, непосредственно связанного с его главными математическими исследованиями. Я оставлю здесь в стороне небольшие заметки о Бореле, Аппеле, И. А. Лаппо-Данилевском, Валле-Пуссене и Бэре [3—7] и рассмотрю только статьи, упомянутые в приведенной цитате из биографической заметки Бари и Голубева, а также только что названную публикацию в «Историко-математических исследованиях».

Интерес Н. Н. Лузина к истории и философии науки — явление довольно частое в среде математиков, изучающих проблемы обоснования как математики в целом, так и отдельных ее отраслей. Мыслители прошлых времен, начиная с древних греков, оставили богатейшее идейное наследие, в частности в разработке проблем, связанных с понятием бесконечности и с аксиоматикой. Напомню в этой связи имена Г. Кантора, Д. Гильберта, Р. Бэра, Э. Бореля, А. Лебега, Г. Вейля, а из отечественных ученых — Н. Н. Лузина, В. В. Степанова, П. С. Александрова, Л. А. Люстерника, А. Я. Хинчина, А. О. Гельфонда, А. И. Маркушевича; это перечисление можно без труда продолжить [1].

О своем интересе к истории математики Н. Н. Лузин ясно высказался в одном письме ко мне 1935 г., которое я, к сожалению, потерял. Помню только, что в этом письме он подчеркнул мысль о возможном эвристическом значении истории математики и высказал надежду, что более глубокое изучение научного наследия Римана поможет доказать его знаменитую гипотезу о нулях дзета-функции, до сих пор не исследованную полностью.

Опубликованная в 1934 г. статья «Дифференциальное исчисление» [9] (см. также [1, т. 3, с. 292—318]) начинается с исторического введения, охватывающего время от древних греков до Ньютона и Лейбница включительно. В этом введении, не пре-

---

[1] О трудах по истории математики А. И. Маркушевича и А. Н. Колмогорова см. [8, 18].

тендующем на полноту и даже содержащем некоторые мелкие исторические неточности, так как автор не был знаком со всеми первоисточниками, мы находим очень тонкое замечание в связи со спором между Ньютоном и Лейбницем о первенстве в открытии исчисления бесконечно малых. Спор этот представляется Лузину беспредметным и в известном смысле неразрешимым, ибо «открытие дифференциального исчисления было совершенно подготовленным, как и открытие неевклидовой геометрии. Учет влияний в такой напряженной атмосфере крайне затруднителен. Аналогичное мы теперь наблюдаем в теории квант или в ведущейся в настоящее время полемике о законе „исключенного третьего", т. е. собственно опять о сущности бесконечного. В такие исторические моменты каждое слово, мысль, даже жест ведут к образованию того или иного потока идей» [1, т. 3, с. 301] [2]. Такого рода сопоставления аналогичных ситуаций или концепций различных эпох характерны для рассматриваемых работ Лузина. В связи с этим упомянем, что несколько ранее, сравнивая метод флюксий Ньютона, бывшего прежде всего «натуралистом», и дифференциальное исчисление «чистого логика» Лейбница, стремившегося свести «искусство думать» к алгебраическим выкладкам, Н. Н. Лузин подчеркивает, что символическая логика Шредера, Пеано, Рассела, Гильберта является возрождением идей Лейбница, в свою очередь уходящих в глубину средневековья. Метод же флюксий Лузин характеризует как некий «общий алгорифм», с полным основанием расходясь в этом вопросе со многими историками науки, полагающими, что алгоритмическим было только дифференциальное исчисление Лейбница.

Наиболее интересно в статье «Дифференциальное исчисление» сравнение классической системы дифференциального исчисления Коши, завершенной Вейерштрассом, с последующей теоретико-множественной трактовкой анализа. Для руководителя Московской школы теории функций особое внимание к переходу анализа бесконечно малых на высшую ступень абстракции были вполне естественными [3]. После краткого упоминания дискуссий об основаниях математического анализа в XVIII в. довольно подробно изложена теория пределов, а также рассмотрены понятия производной и дифференциала по Коши. Особенно выделяется понятие переменной величины, причем отмечается преемственность Коши с идеями метода флюксий Ньютона. Вводимые в задачах математики и естествознания переменные величины играют только вспомогательную роль и в итоге всех вычислений исключаются [4]. Эта необычная трактовка математического анализа Коши (ибо понятие переменной величины было выделено уже в XVII—XVIII вв.) объясняется намерением автора противопоставить классическому анализу Коши математический анализ стационарных величин, построенный на теоретико-множественном фундаменте. «Коши,— писал Лузин,— по заслугам принадлежит слава первого строгого основателя дифференциального исчисления... Его обоснование дифференциального исчисления сохраняет силу и сейчас...» и в педагогике «является замечательным по силе и совершенно неоценимым средством придавать совершенную ясность математическим понятиям» [9, с. 305—306].

---

[2] Ссылки на работы, переизданные в [1], даются здесь и далее по этому переизданию.

[3] Попутное замечание Н. Н. Лузина о бесплодности усилий основать дифференциальное исчисление на теории неархимедовых величин [9, с. 301] устарело. Но полвека назад нельзя было предвидеть возникновения «нестандартного анализа».

[4] В таком освещении концепция Коши несколько напоминает теорию компенсации ошибок Л. Карно, пытавшегося доказать, что бесконечно малые «неопределенные» величины (quantités non designées) автоматически взаимно уничтожаются при пользовании средствами анализа, что и дает всегда точный результат. Вряд ли можно сомневаться в том, что Лузин был знаком с этой концепцией Карно, восходящей к Лагранжу и еще далее к Дж. Беркли.

Однако концепция Коши «бессильна охватить и объяснить многие очень глубокие факты математического анализа, которые были открыты теорией множеств и основанной на ней теорией функций и обнаруживает необыкновенно тонкую и в высшей степени богатую микроструктуру математических предметов, оказывающую могущественное влияние и на соотношение между давно известными классическими свойствами (такова, например, теорема Фишера-Рисса)... Короче, точку зрения теории Коши приходится квалифицировать как близорукую, так как она сильно ограничивает поле зрения» [9, с. 306]. В качестве примера Лузин указывает основную задачу: отыскать для данной функции $f(x)$ непрерывную (примитивную) функцию $F(x)$, имеющую $f(x)$ своей производной, — проблему, поставленную еще при жизни Лейбница и Ньютона. Точка зрения Коши позволяет решить проблему только в тех случаях, когда данная $f(x)$ непрерывна и еще для немногих разрывных функций; между тем имеется бесконечно много разрывных функций $0<f(x)<1$, заведомо служащих на всем этом отрезке производными непрерывных функций $F(x)$, которые нельзя получить с помощью интегрирования по Коши и Риману, так что пришлось вводить новые более общие приемы интегрирования, выходящие за рамки концепции Коши [5].

Вслед за тем Лузин сжато и ясно излагает концепцию теории множеств, которая связана с идеями больше Лейбница, чем Ньютона, и «прежде всего удаляет из анализа все переменные величины, всякое изменение, движение и все сводит к одним только стационарным состояниям, т. е. к постоянным величинам» [9, с. 307]. Набрасывая широкими мазками критический пересмотр системы анализа Коши, Лузин останавливается еще на проникнутой идеей униформизации и арифметизации перестройке оснований анализа, предпринятой Вейерштрассом, и на почти одновременном систематическом построении Г. Кантором и его учениками базирующейся на идее актуальной бесконечности теории множеств. Результатом нового пересмотра оснований анализа явилось убеждение, что «вообще вся математика может быть построена на основе общей идеи множеств», как это показали Дедекинд, Пеано, Фреге и др. [9, с. 308]. Далее вводятся основные понятия теории точечных множеств: верхней и нижней границы замкнутого множества, упорядоченность множества, верхнего и нижнего пределов точечной или числовой последовательности, совпадение которых дает предел последовательности, и т. д. Указав на плодотворность теоретико-множественной концепции как основы математического анализа, Лузин добавляет: «Но на основной вопрос, дает ли эта точка зрения действительно строгое построение дифференциального исчисления, в настоящее время приходится отвечать незнанием» [9, с. 312] в силу открытия неразрешенных парадоксов теории, устранение которых не удалось ни одной из соперничающих теорий: логистическому методу, интуиционизму, аксиоматизму и релятивизму [6]. Как бы ни был, однако, решен этот вопрос, сводящийся в конечном счете к обоснованию математического континуума, основной аппарат дифференциального исчисления сохранится и «накопленные знания по микроструктурам ни в коем случае не должны быть выброшены» [9, с. 312].

Конец рассматриваемой статьи посвящен в основном проблеме дифференцируемости непрерывных функций, классическому примеру Вейерштрасса, в котором непрерывная на отрезке функция нигде не дифференцируема (но имеет, правда, на всюду плотном несчетном множестве производную, равную $+\infty$ или $-\infty$; А. С. Безикович построил много позднее пример непрерывной функции, не имеющей ни в одной точке даже бесконечной производной), а также свойствам обобщенных производных, введенных независимо друг от друга А. Я. Хинчиным и М. Фреше.

К рассматриваемой статье тесно примыкает и статья «Функция», напечатанная в 1935 г. [10] [7]. В начале этой статьи Н. Н. Лузин, указав, что понятие функции, возникнув в споре о колеблющейся струне, т. е. около 1750 г. (что не вполне точно, так как первое определение функции опубликовал еще в 1718 г. Иог. I Бернулли, а сама

[5] Общее решение этого вопроса дал в 1915 г. сам Лузин: всякая данная измеримая функция, конечная почти всюду, имеет примитивную (т. е. непрерывную функцию, имеющую данную функцию своей производной) почти всюду.

[6] Значение последнего термина неясно.

[7] Обе эти статьи были впервые опубликованы в первом издании Большой Советской Энциклопедии. Во 2-м издании статьи Н. Н. Лузина не были воспроизведены, так как выпадали из общего стиля энциклопедических статей; в 3-м издании помещены несколько переработанные и сокращенные варианты статей из 2-го издания.

идея функции еще более раннего происхождения), непрестанно углублялось и эволюционировало и потому охватить это понятие «возможно, лишь проследив основные линии его развития, теснейшим образом связанного с развитием естествознания, в частности математической физики» [10, с. 319]. Вся статья написана в историческом плане. Она начинается с рассмотрения исследований главных колебаний системы конечного числа грузов, подвешенных на горизонтальной или вертикальной нити (Иог. I и Д. Бернулли, Эйлер) и затем предельного перехода от дискретных систем к непрерывным. Центральное место в этой части статьи отведено знаменитому спору о колеблющейся струне (Даламбер, Эйлер, Д. Бернулли, Лагранж и т. д.). Характеризуя «необыкновенное богатство глубоких аналитических идей, связанных с этим спором и в значительной степени порожденных им» [10, с. 329], Лузин замечает, что у нас нет полной уверенности в правильном понимании точки зрения каждого из споривших мыслителей [там же]. Примером служит хотя бы формула Эйлера (1744)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2},$$

из которой Эйлер, однако, вовсе не делает вывода, что два аналитических выражения могут совпадать в отрезке без того, чтобы совпасть всюду. «Такое заключение.— пишет Лузин,— казалось в ту эпоху чудовищным [ибо Эйлер и другие математики считали, что два выражения, совпадающие во всех точках какого-либо отрезка, совпадают всюду.— *А. Ю.*), и Эйлер, имея в руках уже точный факт, прямо подтверждающий это заключение, не видел его по каким-то неясным для нас причинам. Вопрос, поставленный спором, касался отношения между аналитическим определением функции и определением до некоторой степени физическим: если отклонить струну от положения ее равновесия, то существует ли формула, дающая в точности начальное положение этой струны?» [там же]. В XVIII в. найти ответ на данный вопрос не сумели, это удалось только Фурье, который в 1807 г. вывел носящие его имя интегральные выражения коэффициентов Фурье [8].

Обрисовывая значение исследований Фурье, Лузин заканчивает рассмотрение истории понятия функции в XVIII в. Данная статья Лузина была написана до введения в середине 30-х годов XX в. «обобщенных функций» С. Л. Соболева, к которым вскоре независимо пришел Л. Шварц, назвавший их «распределениями», так что данный Лузиным разбор спора о струне с точки зрения современного функционального анализа является неполным. Вместе с тем статья содержит множество интересных мыслей, и можно пожалеть, что она выпала из поля зрения всех историков науки, писавших об упомянутом споре, в том числе и моего.

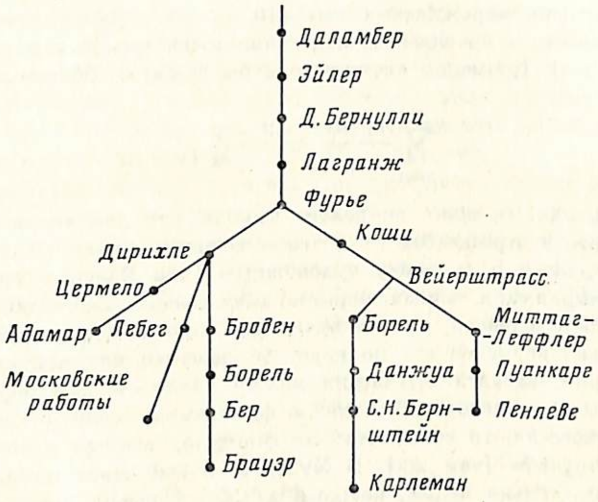
Если до начала XIX в. развитие понятия функции определялось преимущественно запросами естествознания, прежде всего математической физики, то в дальнейшем вступили также в действие внутриматематические стимулы. Н. Н. Лузин подчеркивает, что современное понимание функции могло возникнуть только после открытия Фурье, доказавшего необходимость различения понятий «функция» и «аналитические выражения». Последующее развитие расщепляется на два направления. Стремление сохранить взаимную связь между заданием функции в различных областях ее определения было реализовано в теории функций комплексного переменного и в формулировке аналитической функции в смысле Вейерштрасса. Рассмотрение же функций, заданных для различных значений аргумента произвольным образом, привело к определению функции, связываемому с именем Дирихле и основному в теории функций действительного переменного [9].

---

[8] На самом деле эти выражения вывел по-другому еще ранее, в 1777 г. Эйлер (опубликовано посмертно в 1793 г.), который, однако, не связал это свое открытие с давним спором с Д. Бернулли — быть может, потому, что этот спор утратил в его глазах актуальность.

[9] Картина, рисуемая здесь Лузиным, верная в целом, не вполне точна в деталях. Определение функций действительного переменного, известное под именем Дирихле (1837), было, как теперь известно, сформулировано несколько раньше Н. И. Лобачевским (1834) и через ряд звеньев (Фурье, Лакруа, Кондорсе и др.) восходит к Эйлеру (1755).

Определения функции Вейерштрасса и Дирихле внесли, казалось бы, окончательную ясность в содержание этого понятия. Однако в последнее время, писал Лузин полвека назад, «стало очевидным, что среди математиков отнюдь не установилось полного единодушия относительно ценности и даже смысла полученных определений функции» [10, с. 331]. Определение Вейерштрасса, как показывали факты, представилось слишком узким; определение же Дирихле одни находили совершенным, другие — слишком широким, третьи — вовсе лишенным смысла. Спор о струне возобновился в новом свете и на новом уровне. Лузин предлагает такую схему развития понятия функции:



На первых порах определение Дирихле открыло путь к изучению свойств разных важных классов функций: непрерывных в смысле Коши (следовало бы сказать: Коши и Больцано), монотонных, обладающих на отрезке ограниченным числом экстремумов, дифференцируемых и т. д. Все это чрезвычайно обогащало математику. Но вслед затем ряд ученых подвергли критике названное определение, поскольку в нем однозначная функция y аргумента x рассматривается на данном отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ как однозначное соответствие значений y значениям x, «причем совершенно неважно, каким именно способом установлено это соответствие» [10, с. 332]. Сомнению были подвергнуты слова, приведенные в кавычках. Кроме того, «возражения против этого пункта и его защита впоследствии связались с обсуждением одного положения теории множеств, называемого принципом произвольного выбора и высказанного Цермело («аксиома Цермело»)» [1, т. 3, с. 333].

Дальнейшее изложение вопроса в статье «Функция» настолько сжато, что коротко передать его затруднительно. Достаточно сказать, что в разделе, посвященном функции действительного переменного, оно начинается с почти забытых критических замечаний Т. Бродена (1897), после чего резюмируется дискуссия в среде французских математиков 1905 г., вплотную подводившая к идеям интуиционизма, рассматривается функция Лебега, не входящая в, казалось бы, всеобъемлющую классификацию Бэра, и отмечаются уязвимые пункты конструкции Лебега, указанные московскими математиками. Заключая этот раздел, Лузин писал, что вопрос о природе аналитических выражений далеко не разрешен, и в этой связи вновь упоминает концепцию Брауэра. В другом разделе, где речь идет о функциях комплексного переменного, рассмотрены в первую очередь определение аналитической функции как совокупности всех ее элементов (аналитических продолжений), данное Вейерштрассом, и примыкающие работы Вольтерра и Пуанкаре. После этого казалось, что найдено совершенное определение аналитической функции и объяснено то свойство, что знание функции в любой малой области значений аргумента полностью определяет ее повсюду. Однако немного спустя Борель указал на недостаточность определения Вейерштрасса и после двух неудачных попыток построил, используя звездные разложения Г. Миттаг-Леффлера и некоторые другие результаты, новую общую теорию более общего класса функций, в разработке которой приняли участие Н. Н. Лузин и И. И. Привалов. Статья заканчивается кратким обзором другого типа обобщений аналитических функций — теорий квазианалитических функций С. Н. Бернштейна (1925) и Т. Карлемана (1926), развитых далее многими учеными.

Статья «Функция» особенно характерна для Н. Н. Лузина как историка науки, стремящегося осознать пути научного прогресса с точки зрения ее современного состояния, в данном случае более всего с точки зрения теории множеств и теории функций. Можно заметить близость, хотя и не тождество, в общей характеристике специфических черт математики XX в. у трех крупнейших представителей Московской математической школы: Н. Н. Лузина, П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. Не останавливаясь на этом вопросе (ср. [18]), следует обратить внимание читателя на, так сказать, оборотную сторону медали: если Лузин как историк математики рассматривал ее развитие под углом зрения теории множеств и функций, то в его наиболее важных математических исследованиях явно заметна историко-методологическая компонента его мышления. Эта тенденция явно выражена в его знаменитой магистерской диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), за которую ему в 1916 г. была присуждена, минуя магистерскую степень, сразу степень доктора чистой математики. Здесь не место даже бегло характеризовать этот труд [1, т. 1], ставший отправным пунктом исследований многих математиков. Достаточно привести следующие слова из уже цитированной биографии Лузина, написанной Бари и Голубевым: «В этой работе [т. е. диссертации.— *А. Ю.*] особо подчеркнута историческая связь между теорией тригонометрических рядов и развитием понятия функции и интеграла» [1, т. 3, с. 441]. Этой связи в диссертации посвящено несколько параграфов, содержание которых идейно близко к статье «Функция», написанной почти 30 лет спустя [10].

Переплетение исторического и методологического подхода к математике постоянно находило выражение в размышлениях Лузина о некоторых труднейших проблемах дискриптивной теории функций. С особенной силой, быть может, это отразилось в его докладе «Современное состояние теории функций действительного переменного», сделанном на Всероссийском съезде математиков в Москве весной 1927 г. и дополненном автором при подготовке 2-го тома Собрания сочинений [1, т. 2, с. 494—536]. В разделе, посвященном дескриптивной теории функций, охарактеризованы упомянутые дискуссии между сторонниками Рассела, Гильберта и Брауэра (вместе с Г. Вейлем). Упомянуты и проводившиеся уже несколько лет исследования самого Лузина, получившие первое завершение в его лекциях по теории А-множеств и проективных множеств, изданных в Париже в 1932 г. [1, т. 2]. Неудовлетворенность Лузина каждой из соперничавших школ высказана им с большой силой, но собственной окончательной точки зрения он, видимо, не установил, осторожно замечая лишь, что о существе этих теорий судить затруднительно [1, т. 3, с. 509 и сл.]. Эта осторожность была оправдана последующим развитием математической логики. Но глубинные проблемы дескриптивной теории, касающиеся самой основы основ математики — натурального ряда чисел, волновали Лузина до конца его жизни. В 1943—1947 гг. он опубликовал две небольшие заметки под общим названием «О частях натурального ряда» [1, т. 2, с. 709—722]. Эти работы весьма специального рода, и здесь не место их разбирать. Но живая связь обсуждаемых в них вопросов с историей математики несомненна. В 1946—1947 гг. мне довелось готовить вместе с Н. Н. Лузиным к изданию русский перевод переписки Эйлера с Гольдбахом. Наши встречи или телефонные разговоры тогда были нередкими: Лузин писал предисловие, я — примечания к переводу, выполненному В. С. Гохманом [11]. Параллельно Лузин продолжал заниматься и пробле-

[10] Статьи «Дифференциальное исчисление» и «Функция» не были включены во 2-е издание Большой Советской Энциклопедии, так как выходили за рамки стиля изложения, принятого в данном издании. Они были заменены, первая—статьей автора этих строк, а вторая — статьей И. П. Натансона, более отвечающими характеру энциклопедических статей (обе также содержат исторические обзоры). Соответствующие статьи 3-го издания БСЭ являются в значительной части редакционной переработкой статей 2-го издания.

[11] Инициатором издания был тогдашний президент АН СССР С. И. Вавилов. 5.I.1949 г. Лузин как ответственный редактор подписал рукопись к печати, но перевод

мами оснований математики. Вот что писал он мне, возвращая одолженную книгу Кавальери «Геометрия неделимых» (письмо это публикуется впервые):

«Глубокоуважаемый

Адольф Павлович,

с душевной благодарностью возвращаю Вам Вашу прекрасную книгу *Бонавентура Кавальери.* Хотя я никак не мог ею воспользоваться, ибо заболел очень серьезно (почечное осложнение от гриппа) уже на другой день, как Вы были добры лично принести ее мне, однако чувство уверенности в наличии у меня столь важного источника играло в моем сознании большую и хорошую роль. Я ведь не думал, что проболею три месяца.

Возвращая Вам Вашу книгу, я надеюсь, что мы еще будем видеться, и не по одному только Euler'у. Лично у меня не остается сомнений, что мы, математики, стоим на пороге такого же изменения сознания, которое осуществить в свое время выпало на долю Лобачевскому. Но только теперь это будет касаться уже не пространства, а *натурального ряда чисел.*

19-ый век — век исключительно тихий и медлительный. Сейчас сознание движется ускоренно, и то, что в эти часы кажется парадоксальным, в дальнейшем, в пределах 2—3 научных поколений, войдет прочно в обычное сознание и станет тривиальностью.

Еще раз спасибо за книжку.

Ваш *Н. Лузин.*

15.V.1947

Эйлер — замечательно хорош, особенно в своих опытах нахождения сумм рядов! Мы его мало чувствовали, а писатели начала века его порядком исказили».

Это письмо было написано, вероятно, когда Лузин заканчивал или закончил вторую из статей «О частях натурального ряда», датированную 2.VI.1947 г. и содержавшую доказательства теорем, высказанных им ранее, в 1943 г., в статье, носящей точно такое же название [11]. Статьи эти очень специального характера, и я приведу только общие замечания, помещенные в ее конце: «Автор держится русла идей Пуанкаре и Бореля, стремившихся отрицать актуальную бесконечность во всех ее видах. К сожалению, Пуанкаре под влиянием доктрины Канта о синтетических суждениях a priori в арифметике, по-видимому, колебался совсем отказать натуральному ряду в актуальной бесконечности — то, от чего свободен Борель, рассматривающий трансфинитное и все затруднения с ним как дериват *гипотезы* актуальной бесконечности натурального ряда. В этом русле идей для нас теперь безразлично употребление или неупотребление аксиомы Цермело — различение, поведшееся от Лебега. Близость в арифметике той реформы, которую выполнил Лобачевский в геометрии, зависит от проницательности мыслителей, становящихся на этот путь, а также, по справедливому замечанию акад. И. П. Павлова, от смелости их концепций» [1, т. 2, с. 721—722]. Сам Н. Н. Лузин не успел развить полнее свои мысли о предстоящей, по его мнению, реформе арифметики, а значит, и математической логики. Но, как справедливо отметила С. А. Яновская в статье о развитии математической логики, напечатанной 10 лет спустя, «современное развитие теории алгоритмов является в значительной степени воплощением идеи Н. Н. Лузина о необходимости изучения дескриптивной классификации счетных последовательностей» [12, с. 28]. Здесь идет речь как раз о статьях «О частях натурального ряда» [13].

Упомянутому в конце цитированного письма от 15.V.1947 г. Эйлеру Н. Н. Лузин посвятил две работы. Одна из них — «Эйлер (1707—1783)», напечатанная в год 150-летия со дня смерти Эйлера [13] (см. также [1, т. 3, с. 351—372]), представляет

в силу ряда причин свет не увидел: Н. Н. Лузин скончался 28.II.1950 г., а С. И. Вавилов — 25.I.1951 г. Рукопись до сих пор хранится у меня. Полный текст переписки на языках оригинала (латыни и немецком) и с подробными комментариями был издан позднее совместно Институтом истории естествознания и техники АН СССР и Институтом истории АН ГДР: Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel — 1799—1764/ /Hrsg. Juškevic A. P. und Winter E. Berlin: Akademie Verlag, 1965.

собой общедоступный очерк жизни и творчества, включая его натурфилософские взгляды, технические изобретения и т. д. Другая — это предисловие к несостоявшемуся изданию русского перевода писем Эйлера к Гольдбаху [2] [12]. Судя по письму Н. Н. Лузина ко мне от 6.I.1948 г., в котором Н. Н. Лузин просил ненадолго переслать ему все эйлеровские материалы, находившиеся у меня для составления примечаний, статья была написана в 1947 г., а я еще не закончил писать комментарии. Следует заметить, что вначале предполагалось издать только письма Эйлера, и этим объясняется, что в предисловии почти ничего не говорится о Гольдбахе; впоследствии по рекомендации Лузина были переведены и письма Гольдбаха.

Н. Н. Лузин ограничился замечаниями только о нескольких письмах, особенно его заинтересовавших или нуждавшихся, по его мнению, в специальных разъяснениях (всего около 15), в том числе о введении функций $B(p, q)$ и $\Gamma(x)$, об арифметической природе числа π, о некоторых теоретико-числовых вопросах, связанных с проблемами Ферма, и т. д. Наиболее примечательны в предисловии поиски в письмах Эйлера указаний на теоретико-множественные идеи. Их Лузин усматривает в письмах от 27.X.1742 г. и 5.I.1743 г., из которых, по его мнению, следует, что «Эйлер несомненно имел ясную концепцию точечного (совершенного) множества ε *объема нуль, лежащего в пространстве трех измерений*». Я приведу следующую далее цитату из предисловия Лузина полностью, поскольку она ярко характеризует направление его историко-математических интересов.

«Вопрос был поднят Гольдбахом по поводу микроскопических наблюдений натуралиста Левенгука, утверждавшего, что в крови каждый кровяной шарик плавает в воде и содержит 6 равных кровяных шариков, также погруженных в чистую воду. Гольдбах спрашивает Эйлера, может ли оказаться, что каждый из этих меньших кровяных шариков содержит в свою очередь 6 равных кровяных шариков, погруженных в воду, а каждый из них опять содержит 6 равных кровяных шариков в воде, и так далее *до бесконечности*?

Мы знаем, что совокупность точек, принадлежащих шарикам различных порядков, образует совершенное множество ε пространственной *меры нуль*, так что соединение материальных элементов, составляющих его, имеет *вес нуль*, предполагая плотность материи всюду ограниченной.

В своем отрицании такой структуры Эйлер ведет свои рассуждения по пути, близкому к современному. Он устанавливает, что сумма объемов всех шариков n-го порядка, покрывающих все множество ε, стремится к нулю с возрастанием порядка n и что поэтому, принимая во внимание, что вещество, образующее кровь, не столь тяжело, как золото, нельзя допустить, чтобы такая структура крови простиралась далее шариков 3-го порядка.

Все рассуждение Эйлера сопровождается числами, но все же затруднительно сближать его с каким-либо доказательством необходимости молекулярного строения вещества» [2, с. 136—137].

В предисловии есть много других интересных замечаний, дающих представление о том, как Н. Н. Лузин воспринимал творчество Эйлера (и, добавлю, Ферма). Не останавливаясь на этих частностях, мы обратимся в заключение к двум статьям Лузина о Ньютоне, приуроченным к 200-летию со дня его рождения.

Одна из этих статей — «Исаак Ньютон как математик и натуралист» [4] (см. также [1, т. 3, с. 401—414]) пронизана идеей, что «со времени Ньютона в буквальном смысле слова начинается новая эра в естествознании вообще... мысль Ньютона до неузнаваемости изменила лицо математики, физики и астрономии» [1, т. 3, с. 481]. Следует упомянуть, что так же и тогда же характеризовал роль Ньютона А. Н. Колмогоров (ср. [18]). Резюмировать эту статью, которая сама резюмирует творчество Ньютона, здесь нет возможности. Одна особенность привлекает специальное внимание автора. Это постоянное сопоставление концепций Ньютона и Лейбница, математика-натуралиста и математика философско-логического направления. Наиболее интересны отдельные частные, но важные параллели с современным нам состоянием науки. Например, говоря о теории света Ньютона, Лузин делает замечание: «Сколь малого стоит голый эксперимент, если он заранее не создан целиком в нашей мысли» [1, т. 3,

---

[12] Будучи напечатано только в 1965 г., это предисловие не было включено в собрание сочинений Лузина [1], последний том которого вышел в свет в 1959 г.

с. 411]. В другом случае он мимоходом отмечает, что концепция Лейбница, для которого пространство есть только «соотношение между вещами», по-видимому, близка к концепции Эйнштейна [1, т. 3, с. 403].

Другая статья — «Ньютонова теория пределов» [5] (см. также [1, т. 3, с. 373—400]) вызвала в свое время довольно оживленную полемику. Опираясь на перевод «Математических начал естественной философии», сделанный А. Н. Крыловым с применением нашей современной терминологии, Лузин пришел к мысли, что теория пределов была в этом труде изложена в почти современной ее форме и даже построена «с гораздо большею осторожностью, чем это было сделано Коши» [1, т. 3, с. 375], а также, что имеет место «полное совпадение взглядов Ньютона с современным воззрением на дифференциал» [там же, с. 381]. А. Н. Колмогоров дал близкую, хотя и несколько отличную оценку ньютоновой концепции предела [18]. Иначе подошли к этому же вопросу Д. Д. Мордухай-Болтовской, Ф. Д. Крамар [16] и другие авторы. Свою точку зрения, отличную от трактовки Н. Н. Лузина, как слишком модернизирующей взгляды Ньютона, я имел случай высказать ранее и не стану повторять свою аргументацию [17, с. 443—446]. Мнения историков науки о теории пределов Ньютона и его последователей в XVIII в. до сих пор расходятся: не вполне отчетливые высказывания Ньютона, сделанные в разное время, в разных условиях и другой терминологии, не способствуют достижению полного единства в их истолковании.

Целью данной статьи является не только отметить столетие со дня рождения Н. Н. Лузина, но и привлечь внимание историков математического анализа к этой стороне его творчества, особенно к самой манере его трактовать научное наследие, к столь важной для всех нас проблеме адекватного истолкования идей и методов прошлых времен, с полным учетом современного состояния соответствующей области науки.

Литература

1. *Лузин Н. Н.* Собрание сочинений. Т. 1—3. М.: Изд-во АН СССР, 1953—1959.
2. *Лузин Н. Н.* Предисловие к письмам Л. Эйлера к Х. Гольдбаху.— Истор.-мат. исслед., 1965, XVI, с. 129—144.
3. *Лузин Н. Н.* Борель Эмиль.— Большая Советская Энциклопедия. 1-е изд (далее: БСЭ), 1927, т. 7.
4. *Лузин Н. Н.* Аппель Поль. — Изв. АН СССР. ОМЕН, 1931 и [1, т. 2, с. 345—347].
5. *Лузин Н. Н.* Лаппо-Данилевский И. А. — Изв. АН СССР. ОМЕН, 1931 и [I, т. 3, с. 348—350].
6. *Лузин Н. Н.* Валле-Пуссен. — БСЭ, 1927, т. 8.
7. *Лузин Н. Н.* Бэр Ренэ. — БСЭ, 1927, т. 8 (совместно с А. В. Хромым).
8. *Алекандров П. С., Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* Математик и история математики (О трудах А. И. Маркушевича по истории математики). — Вопр. истории естествозн. и техн., 1971, № 2, с. 96—100.
9. *Лузин Н. Н.* Дифференциальное исчисление. — БСЭ, т. 22 (1934), с. 622—642.
10. *Лузин Н. Н.* Функция. — БСЭ, 1935, т. 59, с. 314—334.
11. *Лузин Н. Н.* О частях натурального ряда. — Докл. АН СССР, 1943, т. 40, с. 195—198; Изв. АН СССР. Сер. мат., 1947, т. 11, с. 403—410. См. также [1, т. 2, с. 709—722].
12. *Яновская С. А.* Математическая логика и основания математики. — Математика в СССР за сорок лет. 1917—1957. Т. 1., М., Физматгиз, 1959, с. 13—1120.
13. *Лузин Н. Н.* Эйлер (1707—1783). — Соц. реконструкция и наука, 1933, № 8, с. 3—24.
14. *Лузин Н. Н.* Исаак Ньютон как математик и натуралист. — Природа, 1943, № 3—4, с. 74—83.
15. *Лузин Н. Н.* Ньютонова теория пределов. Сб. статей к 300-летию со дня рождения Исаака Ньютона/Под ред. Вавилова С. И. М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1943, с. 53—74.
16. *Крамар Ф. Д.* Вопросы основания анализа в трудах Валлиса и Ньютона. — Истор.-мат. исслед., 1950, № 3, с. 486—508.
17. *Юшкевич А. П.* Советская юбилейная литература о Ньютоне. — Тр. Ин-та истории естествознания. Т. 1. М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1947, с. 440—445.
18. *Юшкевич А. П.* А. Н. Колмогоров о предмете математики и ее истории. — Вопр. истории естествозн. и техн., 1983, № 3, с. 67—75.