

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РИСКОВОГО КАПИТАЛА НА ОСНОВЕ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

© 2010 г. С.В. Стрелков, И.Н. Мастяева

(Москва)

Исследуется задача когерентного распределения рискованного капитала кредитной организации. В терминах неатомической кооперативной теории игр предложен подход, позволяющий однозначно определить принцип когерентного распределения капитала через вектор Аумана–Шепли. Для меры риска VAR получен явный вид решения поставленной задачи и продемонстрирован на примере распределения капитала на покрытие операционного риска кредитного банка.

Ключевые слова: когерентное распределение, рискованный капитал, неатомическая кооперативная теория игр, вектор Аумана–Шепли, операционный риск, кредитный банк.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача распределения рискованного капитала – планирование финансовой организацией денежных средств для принятия рисков, возникающих в ходе ее текущей деятельности. Рискованный капитал служит одним из важных гарантов стабильности и устойчивости финансовых институтов. В общем случае он представляет резерв на случай непредвиденных потерь для поддержания платежеспособности финансового института в течение некоторого времени. Как и любое резервирование, планирование рискованного капитала ведет к затратам на его поддержание и не приносит дохода. В зависимости от характера принимаемых кредитной организацией рисков регулятивные органы накладывают различные требования на методы расчета рискованного капитала, а также устанавливают минимальный уровень рискованного капитала (требования Basel II к достаточности капитала обсуждаются в заключительной части работы). Задача распределения суммарного рискованного капитала по составляющим (подразделениям организации, подпортфелям и т.д.) возникает из-за эффекта диверсификации рисков, при котором сумма индивидуальных рисков составляющих, взятых по отдельности, превышает суммарный риск всей организации. Кооперируя, подразделения уменьшают суммарный рискованный капитал, и сэкономленные средства являются доходом от кооперации, который и нужно справедливо поделить между подразделениями.

В терминах неатомической теории игр принцип когерентного распределения рискованного капитала может быть однозначно определен через вектор Аумана–Шепли, который всегда существует, единственный и, в отличие от атомических игр, всегда принадлежит ядру игры. При этом для вектора Аумана–Шепли получается удобное (с вычислительной точки зрения) выражение, которое в частном случае для меры риска VAR имеет аналитический вид и согласуется с концепцией компонентного VAR .

2. ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РИСКОВОГО КАПИТАЛА, МЕРА РИСКА

Математическая постановка задачи распределения рискованного капитала. Пусть X_i , $i \in \{1, \dots, N\}$, – ограниченная случайная величина, характеризующая стоимость подпортфеля i (прибыль подразделения i) кредитной организации в момент времени t . Пусть также число подразделений (портфелей) N кредитной организации постоянно, ограничено и неделимо; будущая стоимость (прибыль) подразделения i и кредитной организации в целом (стоимость портфеля и всех его подпортфелей) $X = \sum_{i=1}^N X_i$ зависит от случайных факторов (изменений на финансовых

рынках, динамики макроэкономических показателей и т.д.) и является случайной величиной, определенной на вероятностном пространстве (Ω, A, P) .

Пусть рассчитанная (по одному из методов, предложенных регулятивными органами, например (Basel II, 2006)) величина рискового капитала (резерва) подразделения i составляет $K_i = \rho(X_i)$. Зададим принцип распределения капитала между подразделениями (подпортфелями) организации функцией Π :

$$\Pi : (N, \rho) \rightarrow \begin{bmatrix} \Pi_1(N, \rho) \\ \dots \\ \Pi_n(N, \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 \\ \dots \\ K_n \end{bmatrix}, \text{ где } \sum_{i \in N} K_i = \rho(X) \xrightarrow{\Pi} \min.$$

Кратко остановимся на двух основных принципах распределения рискового капитала.

1. Самым простым решением является распределение пропорционально индивидуальному риску подразделений (подпортфелей):

$$K_i \left[\rho(X_i) / \sum_{j \in N} \rho(X_j) \right] \rho(X).$$

При данном подходе не учитывается корреляция между составляющими риска. За счет отсутствия учета эффекта диверсификации величина рискового капитала оказывается неприемлемо большой. Поэтому данный подход носит чисто теоретический (модельный) характер и применение его на практике нецелесообразно.

2. Распределение капитала с учетом корреляции рисков подразделений (компонентный VAR):

$$K_i = [\text{cov}(X_i, X) / \sigma^2(X)] K.$$

Несмотря на ряд накладываемых ограничений (предположение о нормальном распределении случайных величин), данный подход имеет широкое практическое применение и будет рассмотрен более подробно в заключительной части статьи. Кроме того, будет показано, что при некоторых ограничениях компонентный VAR является частным случаем общего принципа распределения капитала на основе вектора Аумана–Шепли.

Остановимся более подробно на выборе меры риска для расчета рискового капитала кредитной организации.

Определение. Мерой риска на вероятностном пространстве (Ω, A, P) называется отображение ρ , где $G \rightarrow R$, G – множество ограниченных функций над Ω (множество элементарных событий); R – вещественная прямая.

Начиная с работы (Arzner et al., 1999) в исследованиях, посвященных теории риска, широкое распространение получил класс когерентных мер риска как класс функций, наиболее адекватно описывающих процессы финансового мира, в том числе эффект диверсификации (свойство субаддитивности). Далее в работе будут использованы только когерентные меры риска.

Определение. Мера риска $\rho: G \rightarrow R$ называется когерентной, если она удовлетворяет следующим свойствам:

- субаддитивность: $\forall X_1, X_2 \in G \Rightarrow \rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$;
- монотонность: $X \geq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$;
- положительная однородность: $\forall X \in G, \forall \lambda \geq 0 \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

Замечание 1 (Меньшиков, Шелагин, 2007). В работе (Arzner et al., 1999) в определении когерентной меры риска присутствует условие инвариантности к сдвигу: $\rho(X + ar) = \rho(X) - \alpha$, где r – некоторый безрисковый инструмент. В нашей работе это требование было опущено, так как является несущественным для получения основных результатов и, более того, имеет нежелательные следствия. Так, например, из него следует, что когерентная мера риска не может быть суммой когерентных мер. Пусть $\rho(X) \equiv \rho_1(X) + \rho_2(X)$, тогда

$$\rho(X) - \alpha = \rho(X + ar) = \rho(X) - \alpha = \rho_1(X + ar) + \rho_2(X + ar) = \rho(X) - 2\alpha.$$

Определение. Принцип распределения Π капитала когерентен, если выполнены следующие свойства:

- 1) $\forall M \subset N, \sum_{i \in M} K_i \leq \rho \left(\sum_{i \in M} X_i \right)$ (свойство неотделимости);
- 2) если при объединении произвольных подмножеств $M \subseteq N \setminus \{i, j\}$ портфели i и j вносят одинаковый вклад в рисковый капитал, то $K_i = K_j$ (свойство симметричности).

Определение. Для заданного уровня достоверности $\alpha \in (0, 1)$ мерой риска VAR называется

$$VAR_\alpha(X) = -\inf\{x: P(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

Замечание 2. В общем случае мера VAR не является когерентной (не выполняется свойство субаддитивности). В (Arzner et al., 1999) приводится следующий пример, демонстрирующий нарушение свойств когерентности, для меры VAR .

Пусть X_1, X_2 – независимые, одинаково распределенные случайные величины, имеющие плотность вероятности 0.9 на отрезке $[0, 1]$ и 0.05 – на отрезке $[-2, 0]$. При $\alpha = 0.1$: $VAR_\alpha(X_1) = VAR_\alpha(X_2) = 0$, в то же время $VAR_\alpha(X_1 + X_2) > 0$, так как $P((X_1 + X_2) < 0) = 0.135$.

Замечание 3 (Лобанов, Чугунов, 2007). Если квантили распределений вычисляются в предположении о совместно нормальном распределении, то мера риска VAR является когерентной (выполняются условия субаддитивности, монотонности, положительной однородности и инвариантности к сдвигу).

Распределение рискового капитала есть не что иное, как распределение затрат между несколькими подразделениями кредитной организации (игроками) с определенными ограничениями на вид меры риска (функции затрат) и некоторыми граничными условиями (минимальные требования достаточности капитала (Denault, 2001)), поэтому кооперативная теория игр как нельзя лучше подходит для постановки задачи и получения конечных результатов. Перейдем к формулировке задачи когерентного распределения рискового капитала в терминах кооперативной теории игр.

2. КООПЕРАТИВНАЯ ТЕОРИЯ ИГР

Пусть $N = \{1, \dots, n\}$ – конечное множество подразделений (подпортфелей). В рамках данного раздела множество подразделений будем считать ограниченным и неделимым. Функция затрат $c(S)$ определена на каждом подмножестве $S \subseteq N$ (называемом также коалицией) следующим образом:

$$c(S) = \rho \sum_{i \in S} X_i.$$

Для когерентной меры риска функция затрат является субаддитивной (Denault, 2001):

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T).$$

Определение. Ядром игры (N, c) называется множество распределений $(k_1, \dots, k_n)$, удовлетворяющих двум следующим свойствам:

- 1) $\sum_{i \in N} k_i = c(N)$ (условие эффективности);
- 2) $\forall S \subseteq N: \sum_{i \in S} k_i \leq c(S)$ (принцип отделения).

Второе свойство означает, что коалиция никогда не заплатит цену, превосходящую те затраты, которые она понесет, если захочет обслуживаться самостоятельно.

На вопрос наличия непустого ядра кооперативной игры отвечает критерий Бондаревой (Бондарева, 1963; Ауман, Шепли, 1997), а также более сильное достаточное условие – условие субаддитивности игры: $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T)$. В работе (Меньшиков, Шелагин, 2007) на

основании теоремы Бондаревой показано, что в игре с функцией затрат, определяемой когерентной мерой риска, ядро непустое.

Теперь встает вопрос: каким образом из ядра выбрать единственное необходимое распределение затрат. Объект, ставящий в соответствие игре единственное распределение, называется значением или оператором значения.

Определение. Оператор значения φ есть отображение $E^{2^N} \rightarrow E^N$, ставящее в соответствие каждой игре (N, c) распределение $\varphi(c)$ величины $c(N)$, такое, что

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(c) = c(N).$$

В теории игр на множество операторов значения накладывают три следующих требования.

1. Симметричность: оператор значения φ симметричен, если он коммутирует с перестановкой агентов, т.е. $\forall \tau$ – биекции множества N в себя, и $\forall c \in E^{2^N}$ выполняется: $\tau(\varphi(c)) = (\varphi(c))$.
2. Аддитивность: $\forall x, y \in E^{2^N}$: $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
3. Аксиома “дурака”:

$$\forall i \in N, c \in E^{2^N}: c(S \cup \{i\}) = c(S) \quad \forall S \subset N \setminus \{i\} \Rightarrow \varphi_i(c) = 0.$$

Теорема Шепли (Ауман, Шепли, 1997). Существует только один оператор значения, удовлетворяющий свойствам симметричности, аддитивности и аксиоме “дурака”, – это вектор Шепли:

$$\varphi_i[c] = \sum_{T \subset N, i \in T} \frac{(t-i)!(n-t)!}{n!} (c(T) - c(T \setminus \{i\})).$$

Свойство аддитивности вектора Шепли дает следующий полезный результат: в случае когда мера риска представляется суммой когерентных мер (например, рыночный плюс кредитный риск), для нахождения распределения с использованием вектора Шепли достаточно вычислить вектор Шепли для каждой меры и затем их сложить.

Таким образом, в случае принадлежности вектора Шепли ядру игры он задает единственный искомый принцип распределения рискованного капитала. Достаточным условием принадлежности вектора Шепли ядру кооперативной игры является вышеуказанное условие супераддитивности игры. Однако в (Denault, 2001) показано, что игра, определяемая когерентной мерой риска, удовлетворяет условию супераддитивности только в случае линейных мер риска. Линейность влечет отсутствие эффектов диверсификации рисков, поэтому рассматривать такие меры в задаче распределения рискованного капитала нецелесообразно. В разд. 5 приведен пример распределения рискованного капитала кредитной организации, для которого вектор Шепли оказывается вне ядра игры.

В классе кооперативных атомических игр задача когерентного распределения рискованного капитала кредитной организации в общем случае не имеет решения. В начале данного раздела было введено предположение ограниченности и неделимости множества подразделений (подпортфелей) N . Если отказаться от требования неделимости, то мы перейдем в более общий класс кооперативных игр – класс неатомических игр, для которых также существует обобщенный аналог вектора Шепли. Он, в свою очередь, является единственным решением неатомической кооперативной игры и, в отличие от атомической игры, всегда принадлежит ее ядру.

4. НЕАТОМИЧЕСКИЕ КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

Как и в предыдущем разделе, определим конечное множество $N = \{1, \dots, n\}$ подразделений (подпортфелей). Предположим, что каждая коалиция может состоять из x частей портфеля 1, y частей портфеля 2 и т.д. Пусть компоненты вектора Λ $i \in R_+^n$ соответствуют возможным вкладам игрока i (подразделения) в каждую коалицию.

Определение. Кооперативной неатомической игрой называется множество (N, Λ, r) , где N – конечный набор игроков, $|N| = n$; Λ – σ -алгебра над $[0, 1]$; $r : R^n \rightarrow R$, $r : \lambda \rightarrow r(\lambda)$, $r(0) = 0$ – функция затрат.

Как и в предыдущем разделе, функцию затрат коалиции $r(\lambda)$ будем определять через когерентную меру ρ :

$$r(\lambda) = \rho \left(\sum_{i \in N} \lambda_i X_i / \Lambda \right).$$

Определим оператор φ значения кооперативной неатомической игры в терминах задачи когерентного распределения рисков капитала K между $N = \{1, \dots, n\}$ подразделениями:

$$\varphi : (N, \Lambda, r) \rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_1(N, \Lambda, r) \\ \dots \\ \varphi_n(N, \Lambda, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix}; \text{ где } \lambda'k = r(\Lambda), \Lambda * k = K,$$

где $\Lambda * k$ – обозначение поэлементного умножения.

Определение. Оператор значения кооперативной неатомической игры $\varphi : [N, \Lambda, r] \rightarrow k \in R^n$ задает принцип когерентного распределения капитала, если для него выполняются следующие условия когерентности и он принадлежит ядру игры.

1. Обобщенная инвариантность: если для мер риска r_1, r_2 некоторой матрицы и $\Gamma^{m \times n}$ и $\lambda : 0 \leq \lambda \leq \Lambda$ выполнено условие $r_1(\lambda) = r_2(\Gamma\lambda)$, то $\varphi(N, \Lambda, r_1) = \Gamma^T \varphi(N, \Gamma\Lambda, r_2)$.

2. Непрерывность: отображение φ непрерывно в пространстве R непрерывно дифференцируемых мер r .

3. Монотонность: пусть r – неубывающая мера, тогда $\varphi(N, \Lambda, r) \geq 0$.

4. Нечеткое ядро игры: отображение $\varphi(N, \Lambda, r)$ принадлежит ядру игры (N, Λ, r) , если для всех $\lambda : 0 \leq \lambda \leq \Lambda$ выполняется $\lambda^T \varphi(N, \Lambda, r) \leq r(\lambda)$, $\Lambda^T \varphi(N, \Lambda, r) = r(\Lambda)$.

5. Аксиома “дурака”: если игрок i – “дурак” (т.е.

$$r(\lambda) - r(\lambda^*) = (\lambda_i - \lambda_i^*) \frac{\rho(X_i)}{\Lambda_i},$$

где наборы λ_i и λ_i^* отличаются компонентом i , $0 \leq \lambda \leq \Lambda$), то $k_i = \rho(X_i)/\Lambda_i$.

6. Оператор значения игры $\varphi(N, \Lambda, r)$ принадлежит ядру игры, если $\forall \lambda \in [0, \Lambda]$ выполняется $\lambda^T \varphi(N, \Lambda, r) \leq r(\lambda)$, при этом $\Lambda^T \varphi(N, \Lambda, r) = r(\Lambda)$.

Теорема (Ауман, Шепли, 1997). Существует единственный оператор значения кооперативной неатомической игры, удовлетворяющий пяти аксиомам когерентности и принадлежащий ядру игры, – это вектор Аумана–Шепли:

$$\varphi_i[N, \Lambda, r] = k_i^{AS} = \int_0^1 \frac{\partial r}{\partial \lambda_i}(t\Lambda) dt.$$

Для однородных мер риска (требование однородности меры является третьей аксиомой когерентности) вектор Аумана–Шепли удастся выразить в явном виде:

$$\varphi(N, \Lambda, r)^{AS} = k_i^{AS} = \frac{\partial r(\Lambda)}{\partial \lambda_i}, \quad \varphi(N, \Lambda, r)^{AS} = \nabla r(\Lambda),$$

где величина $\partial r(\Lambda)/\partial \lambda_i$ представляет маргинальный риск подразделения i (подпортфеля); $\nabla r(\Lambda)$ – градиент Аумана–Шепли функции затрат подразделения. Таким образом, полученное аналитическое выражение вектора Аумана–Шепли является искомым принципом когерентного распределения рисков капитала кредитной организации. Величина рисков капитала определяется как $K^{AS} = k^{AS} * \Lambda$ ($* \cdot \Lambda$ – обозначение поэлементного умножения).

5. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВЕКТОРА АУМАНА–ШЕПЛИ В ЗАДАЧЕ КОГЕРЕНТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАПИТАЛА НА ПОКРЫТИЕ ОПЕРАЦИОННОГО РИСКА КРЕДИТНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Одним из методов, рекомендованных Базельским комитетом (Basel II, 2006) для расчета величины капитала на покрытие операционного риска в рамках “усовершенствованных” подходов (методология АМА – Advanced Measurement Approach), является подход, основанный на построении вероятностной модели распределения убытков – LDA (Loss Distribution Approach). В рамках данного подхода предполагается построение статистической модели распределения убытков по каждой категории операционного риска, а затем моделирование их свертки с учетом корреляции риск-факторов. Величина рискового капитала $R(X)$ кредитной организации рассчитывается как разница между величиной $VAR_{99,9}(X)$ совокупного распределения убытков за год X и математическим ожиданием $E[X]$ величины совокупного убытка, умноженная на 12.5:

$$R(X) = 12.5(VAR_{99,9}(X) - E[X]).$$

В работе (Panjer, 2006) подробно рассмотрены методы математического моделирования совокупного убытка кредитной организации, наиболее распространенные виды функций распределения частоты наступления и величины убытков (в том числе элементы теории экстремальных значений), обсуждаются требования Базель II к реализации методологии АМА. Перейдем к демонстрации полученных результатов решения задачи когерентного распределения рискового капитала между подразделениями кредитной организации. Рассмотрим следующий упрощенный модельный пример.

Пусть банк X предоставляет два вида банковских услуг: розничные банковские операции и коммерческие банковские операции (в терминах классификации производственных бизнес-линий кредитных организаций, предложенной в рамках методологии TSA (Basel II, 2006)). Пусть банк X состоит из одного филиала, работающего только с физическими лицами (розничные операции), одного представительства, работающего только с юридическими лицами (корпоративные операции), и одного дополнительного офиса, предоставляющего как розничные, так и корпоративные услуги. Пусть рассчитанная по методу LDA величина капитала на покрытие операционного риска для каждого из портфелей банка (розничный и кредитный) составляет 2 млн руб. и матрица корреляций портфелей имеет вид:

$$Corr = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим также, что внутри каждого портфеля риск-факторы независимы и имеют стандартное нормальное распределение. В работе (Меньшиков, Шелагин, 2007) показано, что маргинальный риск меры VAR представляется в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \lambda_i} = E[\Delta P_i | \Delta P = -VAR_\alpha].$$

Таким образом, при предположении о нормальном распределении риск-факторов принцип когерентного распределения рискового капитала соответствует упомянутой в разд. 2 концепции компонентного VAR :

$$VAR = -\lambda^T \mu + z_\alpha \sqrt{\lambda^T \Sigma \lambda},$$

$$\frac{\partial VAR}{\partial \lambda} = -\mu + z_\alpha \frac{\Sigma \lambda}{2 \sqrt{\lambda^T \Sigma \lambda}} = \nabla VAR, \quad k_j = \lambda_j \nabla VAR,$$

где μ и Σ – математическое ожидание цены портфеля и матрица ковариаций входящих в его состав инструментов в момент времени t , соответственно.

Для упрощения положим множитель $z_\alpha = 1$, тогда совокупная величина капитала банка X на покрытие операционного риска по розничному и корпоративному портфелям, рассчитанная с учетом корреляции, составляет 2 млн руб.:

$$r(X) = VAR(X) = \left((2 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^{1/2} = 2.$$

Значения компонентов вектора K_i^{AS} Аумана–Шепли, вектора φ Шепли, вектора распределения пропорционально индивидуальным рискам и значения VAR -коалиций (подпортфелей) представлены в таблице.

Размер капитала	VAR	K_i	K_i^{AS}	φ
λ_1	1	2/3	1/2	$1 - 1/\sqrt{3}$
λ_2	1	2/3	1/2	2/3
λ_3	1	2/3	1	$1/3 + 1/\sqrt{3}$
Σ	3	2	2	2

Величина капитала для каждой коалиции

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

составляет:

$$r(\lambda_1 + \lambda_2) = \left[(1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{1/2} = 1,$$

$$r(\lambda_1 + \lambda_3) = \left[(2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^{1/2} = \sqrt{3} = r(\lambda_2 + \lambda_3).$$

Распределение рискового капитала пропорционально индивидуальному риску подразделений не удовлетворяет принципу отделения, поскольку $K_1 + K_2 = 4/3 > r(\lambda_1 + \lambda_2) = 1$. Вектор Шепли также не принадлежит ядру, поскольку $\varphi_1 + \varphi_2 > r(\lambda_1 + \lambda_2)$. Таким образом, суммарный рисковый капитал банка X составляет 2 млн руб. и должен быть поделен между филиалом λ_1 , представительством λ_2 и дополнительным офисом λ_3 в соотношении 0.5 млн руб. : 0.5 млн руб. : 1 млн руб., соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ауман Р., Шепли Л. (1997): Значения для неатомических игр. М.: Мир.
- Бондарева О.Н. (1963): Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // *Проблемы кибернетики*. Т. 10.
- Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталёв Е.Ю. (2000): Моделирование рискованных ситуаций в экономике и бизнесе. М.: Фин. и стат.
- Лобанов А.А., Чугунов А.В. (2007): Энциклопедия финансового риск-менеджмента. М.: Альпина Бизнес Букс.
- Меньшиков И.С., Шелагин Д.А. (2007): Кооперативное распределение рискового капитала. М.: Вычислительный центр РАН.
- Мулен Э. (1985): Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир.
- Указание ЦБР (2004): Указание ЦБР от 16.01.2004 № 1379-У (с изменениями от 10.07.2007) “Об оценке финансовой устойчивости банка в целях признания ее достаточной для участия в системе страхования вкладов”.
- Феллер В. (1984): Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир.

Arzner Ph., Delvaen F., Eber J.-M., Heath D. (1999): Coherent Measures of Risk // *Math. Finance*. Vol. 9. № 3.

Basel II (2006): International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework, Comprehensive Version // Bank for International Settlements. Basel, Switzerland.

Denault M. (2001): Coherent Allocation of Risk Capital. Montreal: Encole des H.E.C.

Panjer H. (2006): Operational risk: modeling analytics. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc.

Поступила в редакцию

24.10.2008 г.

Risk Capital Allocation Based on Cooperative Game Theory

S.V. Strelkov, I.N. Mastyaeva

This paper focuses on bank capital-at-risk coherent allocation problem. In terms of nonatomic cooperative game theory we introduce an approach based on the Aumann–Shapley value that defines a unique coherent capital allocation. For VAR risk measure we found an open form solution of the problem indicated above and the results are illustrated by an example of operational risk capital allocation in a commercial bank.

Keywords: coherent allocation, risk capital, cooperative game theory, Aumann–Shapley value, credit bank.